

Chapitre 5

LA LOI NORMALE

Résumé

Pour une variable quantitative continue X , la courbe des fréquences, d'équation $y = f(x)$ remplace l'histogramme des fréquences : de même que l'aire du rectangle représentant une classe était, avec une échelle appropriée, égale à sa fréquence, ici, l'aire entre $x = a$ et $x = b$ délimitée par l'axe horizontal $y = 0$ et la courbe d'équation $y = f(x)$ représente la fréquence (ou le pourcentage) des individus dont la modalité de X est comprise entre a et b .

Remarque : l'aire totale, entre l'axe horizontal $y = 0$ et la courbe de fréquence $y = f(x)$ vaut 1.

Distribution normale $N(\mu, \sigma)$: sa courbe de fréquence a pour équation $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. C'est une courbe en "cloche", symétrique par rapport à la verticale d'équation $x = \mu$; plus σ est petit, plus la "cloche" est "haute" et "étroite" (valeurs concentrées autour de la moyenne).

- Si la distribution de X est la loi normale $N(0, 1)$, pour $a > 0$, on lit $p(0 < X < a)$ sur la table p.109 : on détermine alors tous les $p(a' < X < a)$ en utilisant la symétrie :

$$p(X < 0) = p(X > 0) = 0,5 \text{ et pour } a' < 0, p(a' < X < 0) = p(0 < X < -a')$$

ainsi qu'un découpage judicieux des aires considérées.

- Pour X de distribution normale quelconque, on utilise le résultat fondamental suivant :

si X a pour distribution $N(\mu, \sigma)$ alors la variable $X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}$ a pour distribution $N(0, 1)$.

On a alors $p(a' < X < a) = p\left(\frac{a' - \mu}{\sigma} < X^* < \frac{a - \mu}{\sigma}\right)$, ce qui permet d'utiliser la méthode de la loi $N(0, 1)$.

On dit que $\frac{a - \mu}{\sigma}$ est la valeur réduite associée à a .

1. On considère que, pour un conducteur, le nombre de kilomètres avant le premier accident suit une loi normale de moyenne 35000km avec un écart-type de 5000km.

- 1) Déterminer le pourcentage d'individus ayant eu leur premier accident avant les 25000km.
- 2) Déterminer le pourcentage d'individus ayant eu leur premier accident après les 25000km et avant les 40000km.
- 3) Déterminer le pourcentage d'individus n'ayant pas eu d'accident avant les 45000km.
- 4) Au bout de combien de kilomètres peut-on dire que 75% des conducteurs ont eu leur premier accident ?

2. Dans une usine, on a mis en fonction une machine à confectionner des paquets dont les masses journalièrement suivent une loi normale. La masse moyenne des paquets est de 500 grammes avec un écart-type de 25 grammes. Sur 2000 paquets confectionnés en une journée

- 1) combien de paquets pèsent de 480 à 550 grammes ?
- 2) combien de paquets pèsent plus de 550 grammes ?

3) Quel est le poids du plus léger des paquets parmi les 1000 plus lourds ?

3. Une étude effectuée par un chercheur a montré que l'âge au cours duquel apparaissent les premiers mots de vocabulaire chez les enfants suit une loi normale de moyenne 11.5 mois et d'écart-type 3.2 mois.

1) Déterminer la proportion d'enfants prononçant leurs premiers mots entre la fin du 10ème mois et la fin du 12ème mois.

2) Déterminer la proportion d'enfants n'ayant encore prononcé aucun mot au bout de 13 mois.

3) Déterminer à quel âge, 25% des enfants n'ont pas encore prononcé leurs premiers mots.

4) À quelle notion, étudiée dans le cadre des variables ordinales, correspond le résultat obtenu à la question précédente ?

4. Sur une population de 5000 couples, on admet que le nombre de mois au bout duquel un couple se sépare suit une loi normale de moyenne 36 mois et d'écart-type 12 mois.

1) Déterminer le nombre de couples se séparant entre 24 et 40 mois.

2) Déterminer le nombre de couples ne s'étant pas séparés au bout de 46 mois.

3) Estimer, à 1 près, sans calcul, le nombre de couples étant encore ensemble au bout de 10 ans.

4) Au bout de combien de temps 25% des couples se sont-ils séparés ?

5. On admet que le temps passé chaque jour devant la télé suit une loi normale de moyenne 3 heures avec un écart-type de 45mn.

1) Déterminer le pourcentage de personnes regardant moins de 2h et plus de 4h.

2) Déterminer le pourcentage de ceux regardant entre 2h et 3h30.

3) Déterminer les trois nombres Q_1 , Q_2 , Q_3 définis par :

$$p(X < Q_1) = p(Q_1 < X < Q_2) = p(X > Q_3) = 0.25$$

Que représentent ces 3 nombres ?

6. Une population compte 250000 familles avec exactement 2 enfants. On a constaté que l'écart en jours entre les deux naissances suit une loi normale de moyenne 890 jours et d'écart-type 75 jours.

1) Déterminer le nombre de familles ayant attendu au moins 3 ans avant d'avoir le second enfant.

2) Déterminer le nombre de familles ayant attendu au plus un an avant d'avoir le second enfant.

3) Déterminer le nombre de familles dont l'écart entre les deux naissances est de 2 ans. (On considèrera qu'une année est toujours composée de 365 jours).

7. On suppose que le taux de réussite à un examen passé depuis de longues années par des étudiants de L1 suit une loi normale de moyenne 30% et d'écart-type 2.5%.

1) Déterminer la proportion d'épreuves ayant un taux de réussite compris entre 31% et 35%

2) Déterminer la proportion d'épreuves ayant un taux de réussite inférieur à 35%.

3) Déterminer la proportion d'épreuves ayant un taux de réussite supérieur à 32%;

4) Déterminer le nombre a tel que 20% des épreuves aient un taux de réussite supérieur à $a\%$.

8. Les scores en saut en hauteur X d'un groupe de 600 filles suivent une loi Normale $N(180; 10)$. Ceux Y d'un groupe de 800 garçons suit la loi $N(190; 15)$.

Déterminer le nombre de filles dont le score est supérieur à la moyenne des garçons.

Déterminer le nombre de garçons dont le score est inférieur à la moyenne des filles.

9. Soit une loi normale $X = N(100; 15)$. Trouver les valeurs a_1, x_2, x_3, x_4 de X telles que :

$$P(X < x_1) = 12.5\% ; P(X < x_2) = 25\% ; P(X < x_3) = 75\% ; P(X < x_4) = 87.5\%$$

10. Lors de l'étude d'une population de personnes effectuant un métier à risque, on construit un indice de stress Z qui suit une loi Normale $N(0, 1)$ (plus la valeur de l'indice est élevée et plus le niveau de stress de la personne étudiée est important).

- 1) Déterminer l'indice de stress s_1 tel que 5% des personnes aient un indice supérieur à s_1 .
 - 2) Déterminer l'indice de stress s_2 tel que 95% des personnes aient un indice inférieur à s_2 .
 - 3) Déterminer l'indice de stress s_3 tel que 5% des personnes aient un indice inférieur à s_3 .
 - 4) Déterminer l'indice de stress s_4 tel que 95% des personnes aient un indice supérieur à s_4 .
 - 5) Déterminer l'indice de stress s_5 tel que 95% des personnes aient un indice compris entre $-s_5$ et s_5 .
 - 6) Déterminer l'indice de stress s_6 tel que 5% des personnes aient un indice en dehors de $[-s_6; s_6]$.
-
-